# Méthodes mathématiques pour la physique (examen du 19/12/2008)

**Exercice 1**. Considérons la fonction $f(x)$ définie par

$$f(x) = \cos \pi a x \qquad \text{pour } -1 \leq x \leq 1, \qquad f(x+2) = f(x).$$

Ici $a$ est un paramètre réel, $a \notin \mathbb{Z}$.

1. Développer $f(x)$ en série de Fourier (de cosinus).
2. En utilisant ce développement, calculer la somme infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}.$$

*Indication*: Posez $x = 1$ dans "$\cos \pi a x =$ série de Fourier de $\cos \pi a x$".

3. Calculer la somme infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - a^2)^2}.$$

*Indication*: Utilisez l'égalité de Parseval.

**Exercice 2**. En utilisant la méthode des fonctions de Green, trouver la solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y''(x) + 16 y(x) = \sin 3x,$$

vérifiant les conditions limites $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$. Vérifier le résultat.

**Exercice 3**. Considérons l'opérateur

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2,$$

avec le domaine composé des fonctions lisses qui s'annulent quand $x \to \pm\infty$.

1. Démontrer explicitement que $H$ est symétrique par rapport au produit scalaire

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \cdot g(x) dx, \qquad f, g \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}).$$

2. Que peut-on dire sur les valeurs propres et les vecteurs propres de $H$?

**Exercice 4**. Calculer la dérivée première et la dérivée seconde, au sens des distributions, de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$. Quelle est la dérivée d'ordre $k$?

---

Quelques formules dont vous pouvez avoir besoin:

$$e^{i\pi n} = (-1)^n \qquad \forall n \in \mathbb{Z},$$
$$\sin \pi(a \pm n) = (-1)^n \sin \pi a \qquad \forall n \in \mathbb{Z},$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta,$$